

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ;

(Μονάδες 2)

β) i. Πότε μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  έχει αντίστροφη;

(Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του (i), πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$  ;

(Μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης .

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 5**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

α) Για κάθε συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  με  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in A$ , ισχύει ότι η  $f$  είναι σταθερή στο  $A$ .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό /Λάθος

Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση )

β) Για κάθε συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , όταν υπάρχει το όριο της  $f$  καθώς το  $x$  τείνει στο  $x_0 \in A$ , τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της  $f$  στο  $x_0$ .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό /Λάθος

Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση )

**Μονάδες 8**

**A5.** Έστω η συνάρτηση  $f$  του διπλανού σχήματος.

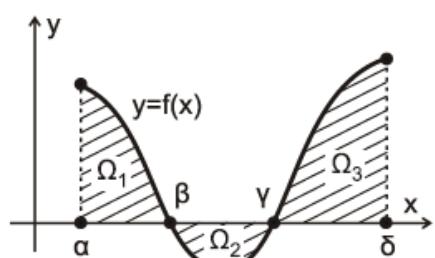
Αν για τα εμβαδά των χωρίων  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  και  $\Omega_3$  ισχύει ότι

$$E(\Omega_1) = 2, E(\Omega_2) = 1 \text{ και } E(\Omega_3) = 3,$$

τότε το  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  είναι ίσο με :

- α) 6      β) -4      γ) 4      δ) 0      ε) 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.



**Μονάδες 2**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- A1.** α) Ορισμός, (σχολικό βιβλίο, σελ. 15).  
β) i. Όταν είναι  $1 - 1$  στο A, (σχολικό βιβλίο, σελ. 35).  
ii. Αν  $f(A)$  είναι το σύνολο τιμών της f, τότε η αντίστροφη είναι η  $g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$  με την οποία κάθε  $y \in f(A)$  αντιστοιχίζεται στο μοναδικό  $x \in A$  για το οποίο ισχύει  $f(x) = y$ .
- A2.** Θεώρημα, (σχολικό βιβλίο, σελ. 142).
- A3.** Απόδειξη, (σχολικό βιβλίο, σελ. 135).

- A4.** α) **Λάθος.** Έστω η συνάρτηση  $f: (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

Τότε ισχύει  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in A$ , αλλά η f δεν είναι σταθερή, αφού παίρνει δύο διαφορετικές τιμές.

**Εναλλακτικά:** Η πρόταση δεν ισχύει σε ένωση διαστημάτων. (Αναφορά του σχολίου του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 134, χωρίς το αντιπαράδειγμα).

- β) **Λάθος.** Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , ενώ  $f(0) = 1$ .

**Εναλλακτικά:** Η συγκεκριμένη συνθήκη ισχύει μόνο για συνεχείς συναρτήσεις.

- A5.** γ



## ΘΕΜΑ B

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = e^{-x} + \lambda$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  την ευθεία  $y = 2$ .

- B1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 2$ .

**Μονάδες 3**

- B2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) - x = 0$  έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα  $(2, 3)$ .

**Μονάδες 7**

- B3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

**Μονάδες 6**

- B4.** Έστω  $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$ ,  $x > 2$ . Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και  $f^{-1}$  στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

**Μονάδες 9**

**ΛΥΣΗ:**

- B1.** Εφόσον η  $y = 2$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda - 2) = 0 \Rightarrow 0 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Οπότε  $f(x) = e^{-x} + 2$ .

- B2.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - x$ .

Τότε έχουμε:  $g(2) = f(2) - 2 = e^{-2} > 0$ .

$$g(3) = f(3) - 3 = e^{-3} + 2 - 3 = e^{-3} - 1 < 0$$

Από το Θεώρημα Bolzano για την  $g$  στο διάστημα  $[2,3]$  συμπεραίνουμε ότι υπάρχει

$$x_0 \in (2,3) : g(x_0) = 0$$

Αυτό είναι και μοναδικό αφού  $g'(x) = f'(x) - 1 = -e^{-x} - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , άρα η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα και 1-1, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

- B3.** Η  $f(x) = e^{-x} + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = -e^{-x} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Συνεπώς,  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , άρα και 1-1.

Για να βρούμε την αντίστροφη υπολογίζουμε πρώτα το σύνολο τιμών της  $f$ , το οποίο θα είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 2) = +\infty + 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 2) = 0 + 2 = 2$$

Συνεπώς, εφόσον  $f$  συνεχής στο  $D_f = \mathbb{R}$  και γνησίως φθίνουσα:  $f(D_f) = (2, +\infty)$

Οπότε  $D_{f^{-1}} = (2, +\infty)$ .

Για να βρούμε την αντίστροφη λύνουμε την εξίσωση  $y = f(x)$  ως προς  $x$  και έχουμε:

$$y = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow y - 2 = e^{-x} \Leftrightarrow x = -\ln(y - 2), y > 2$$

Συνεπώς  $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), x > 2$

- B4.** Ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-\ln(x - 2)) = -(-\infty) = +\infty$$

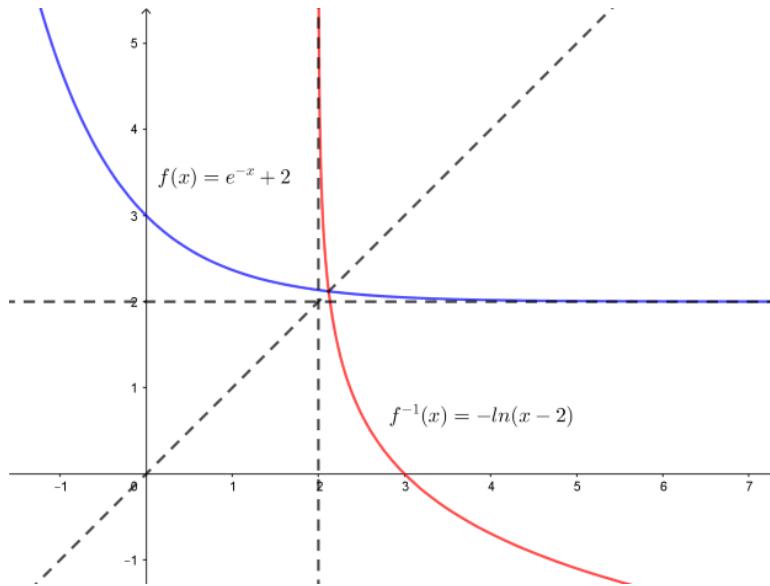
Θέτουμε  $u = x - 2$ .

Τότε είναι  $\lim_{x \rightarrow 2^+} u = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0$  οπότε και

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (-\ln(x - 2)) = \lim_{u \rightarrow 0^+} (-\ln u) = -(-\infty) = +\infty$$

άρα η ευθεία  $x = 2$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $f^{-1}$  και δεν υπάρχει άλλη κατακόρυφη ασύμπτωτη, καθώς η  $f^{-1}$  είναι συνεχής για  $x > 2$ .

Σχεδιάζουμε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων:



**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x > 1 \end{cases}$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = 1$ .
- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Γ3.** i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα  $x_0$ , η οποία είναι αρνητική.  
(Μονάδες 4)
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f^2(x) - x_0 \cdot f(x) = 0$  είναι αδύνατη στο  $(x_0, +\infty)$ .  
(Μονάδες 4)  
**Μονάδες 8**

- Γ4.** Ένα σημείο  $M(x,y)$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = f(x)$ ,  $x \geq 1$ .

Τη χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία το σημείο  $M$  διέρχεται από το σημείο  $A(3,10)$ , ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $MOK$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ , όπου  $K(x,0)$  και  $O(0,0)$ .

**Μονάδες 8**

**ΛΥΣΗ:**

**Γ1.** Η  $f$  ως παραγωγίσμη είναι συνεχής συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1).$$

Για  $x > 1$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + \alpha) = 1 + \alpha.$$

Για  $x < 1$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = 1 + \beta.$$

και

$$f(1) = 1 + \alpha.$$

Συνεπώς

$$1 + \alpha = 1 + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Η  $f$  είναι παραγωγίσμη στο 1 συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Για  $x > 1$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - 1 - \alpha}{x - 1} = 2.$$

Για  $x < 1$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \alpha x - 1 - \alpha}{x - 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(e^{x-1} + \alpha x - 1 - \alpha)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \alpha}{1} = 1 + \alpha.$$

Συνεπώς

$$1 + \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ και } \beta = 1.$$

**Γ2.** Για κάθε  $x > 1$  η  $f$  είναι παραγωγίσμη με  $f'(x) = 2x$  με  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x > 1$ .

Για κάθε  $x < 1$  η  $f$  είναι παραγωγίσμη με  $f'(x) = e^{x-1} + 1$  με  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x < 1$ .

Συνεπώς ισχύει ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$  άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0.$$

Η  $f$  ως συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  έχει σύνολο τιμών το

$$f(\mathbb{R}) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

**Γ3.** i. Ισχύει ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $[-1, 0]$  με  $f(0) = \frac{1}{e} > 0$ ,  $f(-1) = \frac{1}{e^2} - 1 = \frac{1-e^2}{e^2} < 0$ .

Σύμφωνα με το Θ. Bolzano η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει ρίζα στο  $(-1,0) \subseteq \mathbb{R}$  και η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο  $\mathbb{R}$  επειδή η  $f$  είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα. Άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μία αρνητική ρίζα.

- ii. Επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει ότι:

$$x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) > 0,$$

άρα  $f^2(x) > 0$  και επειδή  $x_0 < 0$  είναι  $-x_0 f(x) > 0$ , οπότε για κάθε  $x \in (x_0, +\infty)$  είναι

$$f^2(x) - x_0 f(x) > 0.$$

Επομένως η εξίσωση  $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$  είναι αδύνατη στο  $(x_0, +\infty)$ .

- Γ4. Για το Εμβαδόν  $E$  του τριγώνου ΜΟΚ ισχύει ότι

$$E = \frac{1}{2}x \cdot (x^2 + 1) \Leftrightarrow E = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x.$$

Κάθε χρονική στιγμή  $t$  θα έχουμε ότι

$$E(t) = \frac{1}{2}x^3(t) + \frac{1}{2}x(t) \text{ και } E'(t) = \frac{3}{2}x^2(t)x'(t) + \frac{1}{2}x'(t).$$

Τη χρονική στιγμή  $t_0$  θα είναι:

$$E'(t_0) = \frac{3}{2}x^2(t_0)x'(t_0) + \frac{1}{2}x'(t_0).$$

Άρα  $E'(t_0) = \frac{3}{2}3^2 \cdot 2 + \frac{1}{2}2 = 28$  τετραγωνικές μονάδες ανά δευτερόλεπτο.

#### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$  όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και η ευθεία ( $\varepsilon$ ):  $y = -x + 2$ , η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο της  $A(1,1)$ .

- Δ1. Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -1$  και  $\beta = 2$ .

**Μονάδες 4**

- Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την ευθεία ( $\varepsilon$ ) και τις ευθείες  $x=1$  και  $x=2$ .

**Μονάδες 5**

- Δ3. i. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) \geq -1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 3)

- ii. Να αποδείξετε ότι  $f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \cdot \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 5)

**Μονάδες 8**

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = -x^3 - x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

**Μονάδες 8**

**ΛΥΣΗ:**

**Δ1.** Πρέπει  $\begin{cases} f(1)=1 \\ f'(1)=\lambda_e=-1 \end{cases}$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με παράγωγο

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha.$$

Συνεπώς

$$f'(1) = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1 \text{ και } f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 2.$$

Έτσι είναι

$$f(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$$

και

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1.$$

- Δ2.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - (-x+2) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2).$$

Είναι

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \quad \text{ή} \quad \ln(x^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x=1.$$

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1,$$

(διότι  $\ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \geq 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$  που ισχύει. Η ισότητα ισχύει μόνο για  $x=1$ ).

Συνεπώς η συνάρτηση  $h$  είναι μη αρνητική στο  $[1,2]$ .

Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι ίσο με

$$\begin{aligned} \int_1^2 h(x) dx &= \int_1^2 (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) dx = \\ &= \int_1^2 \left( \frac{x^2 - 2x + 2}{2} \right)' \ln(x^2 - 2x + 2) dx = \\ &= \left[ \left( \frac{x^2 - 2x + 2}{2} \right) \ln(x^2 - 2x + 2) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2 - 2x + 2}{2} \cdot \frac{\cancel{2}(x-1)}{\cancel{x^2 - 2x + 2}} dx = \\ &= \ln 2 - \left[ \frac{(x-1)^2}{2} \right]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{2\ln 2 - 1}{2}. \end{aligned}$$

**Δ3.** i. Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(x-1)}{x^2-2x+2} + \frac{4(x-1)(x^2-2x+2)-4(x-1)^3}{(x^2-2x+2)^2} = \\ &= \frac{6(x-1)(x^2-2x+2)-4(x-1)^3}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{2(x-1)(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+2)^2}. \end{aligned}$$

Είναι  $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$  με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x=1$ , αφού το τριώνυμο  $x^2-2x+4$  έχει αρνητική διακρίνουσα, άρα είναι πάντοτε θετικό.

Συνεπώς η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 1]$  και γνησίως αύξουσα στο  $(1, +\infty]$ , οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο  $x_0 = 1$  το  $f'(1) = -1$ .

Άρα  $f'(x) \geq -1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x=1$  και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $s(x) = f(x) + x$  η οποία είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$s'(x) = f'(x) + 1 \geq 0$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x=1$  (λόγω του ερωτήματος Δ3i).

Άρα η συνάρτηση  $s$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . Η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται:

$$\begin{aligned} f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) &\geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda + \frac{1}{2} \geq f(\lambda) + \lambda \\ &\Leftrightarrow s\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq s(\lambda) \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{2} \geq \lambda \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq 0, \end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Δ4.** Έστω  $A(x_1, f(x_1))$  και  $B(x_2, g(x_2))$  τα σημεία επαφής της κοινής εφαπτομένης με την  $C_f$  και  $C_g$  αντίστοιχα. Τότε οι εξισώσεις εφαπτομένων σε αυτά είναι:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)x + f(x_1) - x_1 f'(x_1)$$

και

$$y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2)x + g(x_2) - x_2 g'(x_2).$$

Αυτές πρέπει να ταυτίζονται άρα:

$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) & (1) \\ f(x_1) - x_1 f'(x_1) = g(x_2) - x_2 g'(x_2) & (2) \end{cases}$$

Όμως λόγω του Δ3i έχουμε  $f'(x_1) \geq -1$  με ισότητα για  $x_1 = 1$ .

Επίσης  $g(x) = -3x^2 - 1$  και φανερά ισχύει  $g'(x) \leq -1$  με ισότητα για  $x=0$ .

Άρα για να ισχύει η (1) πρέπει  $f'(x_1) = g'(x_2) = 1$  δηλαδή  $x_1 = 1$  και  $x_2 = 0$  λύσεις που επαληθεύουν και τη σχέση (2). Άρα οι  $C_f, C_g$  έχουν μία μόνο κοινή εφαπτομένη η οποία εφάπτεται της  $C_f$  στο  $(1, f(1))$  και της  $C_g$  στο σημείο  $(0, g(0))$ .

Η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = -(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

**ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:**

**Γ3.** ii. Για  $x \neq x_0$  είναι  $f(x) \neq 0$  άρα η εξίσωση γίνεται  $f(x) = x_0$ .

Όμως για  $x > x_0$  επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα παίρνουμε  $f(x) > f(x_0)$  δηλαδή  $f(x) > 0$ .

Όμως είναι  $x_0 < 0$ , όπως έχει ήδη αποδειχθεί, συνεπώς η εξίσωση  $f(x) = x_0$  είναι αδύνατη (πρώτο μέλος θετικό, 2ο μέλος αρνητικό).

**Γ3.** ii. Για  $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \Rightarrow f(x) - x_0 > -x_0 > 0$

Ακόμα είναι  $f(x) > 0$  και επομένως  $f(x)(f(x) - x_0) > 0$ .

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη στο  $(x_0, +\infty)$

**Δ2.** Για  $\alpha = -1, \beta = 2$  έχουμε  $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$  οπότε το ζητούμενο εμβαδόν (έστω E )

είναι

$$\begin{aligned} E &= \int_1^2 |f(x) - (-x + 2)| dx = \\ &= \int_1^2 |(x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2)| dx \quad \begin{aligned} x^2 - 2x + 2 &= (x-1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0, x-1 \geq 0, \forall x \geq 1 \\ u &= x^2 - 2x + 2 \Rightarrow du = 2(x-1)dx \Rightarrow (x-1)dx = \frac{1}{2}du \\ x=1 &\Rightarrow u=1, x=2 \Rightarrow u=2 \end{aligned} \\ &= \int_1^2 (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2} \cdot \ln u du = \frac{1}{2} \int_1^2 (u)' \cdot \ln u du = \\ &= \frac{1}{2} \left[ u \ln u \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 1) = \ln 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta 2. \quad \int_1^2 |f(x) - (-x + 2)| dx &= \int_1^2 [(x-1) \ln(x^2 - 2x + 2)] dx = \\ &= \int_1^2 [(x-1) \ln(x^2 - 2x + 2)] dx = \int_1^2 \left[ \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) \right] dx = \\ &= \left[ \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \ln(x^2 - 2x + 2) \right]_1^2 - \int_1^2 \left[ \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2} \right] dx = \\ &= 0 - 0 - \int_1^2 \frac{x^2 - 2x}{2} \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2} dx = - \int_1^2 \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 2} dx = \\ &= - \int_1^2 \left( x - 1 + \frac{-2x+2}{x^2 - 2x + 2} \right) dx = - \left[ \frac{x^2}{2} - x - \ln(x^2 - 2x + 2) \right]_1^2 = \end{aligned}$$

$$= - \left[ 2 - 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 + 0 \right] = \ln 2 + \frac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

**Δ3.** i. Για  $\alpha = -1$  και  $\beta = 2$  έχουμε:  $f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1$  και με

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0 \\ \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

ii. Είναι

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \cdot \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq f(\lambda) + \lambda - 2 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ισχύει η (1).

Από το Θεώρημα της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την  $f$  στο διάστημα  $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$

προκύπτει ότι υπάρχει  $\xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$  ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\lambda + \frac{1}{2} - \lambda} = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \Rightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) = \frac{f'(\xi)}{2}$$

και με  $f'(\xi) \geq -1$  (από το Δ3 . i) προκύπτει ότι ισχύει η (1) άρα και η αρχική.

**Δ3.** i. Έχουμε

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 = \ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} - 1.$$

Είναι

$$(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \ln[(x-1)^2 + 1] \geq \ln 1 \Leftrightarrow \ln[(x-1)^2 + 1] \geq 0.$$

Ακόμα είναι

$$\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0 \text{ αφού } 2(x-1)^2 \geq 0 \text{ και } (x-1)^2 + 1 > 0.$$

Τότε είναι

$$\ln[(x-1)^2+1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1} \geq 0$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για  $x=1$  αφού το  $(x-1)^2+1$  γίνεται ίσο με 1 μόνο για  $x=1$ , οπότε και

$$\ln[(x-1)^2+1] = 0$$

και  $2(x-1)^2=0$ , μόνο για  $x=1$ , οπότε και

$$\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1} = 0.$$

$$f'(x) = \ln[(x-1)^2+1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1} - 1 \Leftrightarrow f'(x)+1 = \ln[(x-1)^2+1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1} \geq 0,$$

οπότε είναι  $f'(x)+1 \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Άρα  $f'(x) \geq -1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x=1$ .

